

ШИФР

а.36

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Павловский Иван Константинович

Дата рождения

Школа № 38 район Советский город Нижний Новгород

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

+1 чистовик
+1 черновик
+1 черновик
+1 чистовик

Дата проведения 19.01.2025

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному

заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	±	-	-
20	18	12	3	0

Иль-

Заполняется проверяющим

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 011.1

Σ = 53

$$2 \cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$2 (\cos^2 x)^2 - \sin^3 x = 1$$

$$2 (1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2 (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2 - 4\sin^2 x + 2\sin^4 x - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2 \sin^4 x - \sin^3 x - 4\sin^2 x + 1 = 0$$

$$\sin x = t$$

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0, \text{ заметим, что } t = -1, t = \frac{1}{2} \text{ - корни}$$

По схеме Горнера

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -1 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & -2 & -2 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \\ 2t^2 - 2t - 2 = 0 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \\ t^2 - t - 1 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$t^2 - t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$t_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ \sin x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

$$3 < 1 + \sqrt{5} < 4$$

$$-3 < -\sqrt{5} < -2$$

$$\frac{3}{2} < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < 4$$

$$-2 < 1 - \sqrt{5} < -1$$

$$-1 < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x = \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi p, p \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi q, q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k; \pi - \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

№ 11.2

1) Определим возможные варианты взаиморасположения окружностей.

1.1) В случае если окружности пересекаются в двух точках (C_1 и C_2), $\angle A_1 B_1$ - тупой, $\angle A_2 B_2$ - острый, следовательно, противоречие условию $\angle C = 90^\circ$ (пункт 1.1.)

1.2)

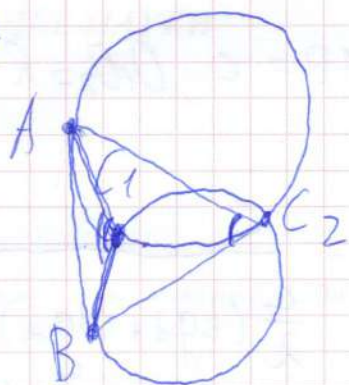
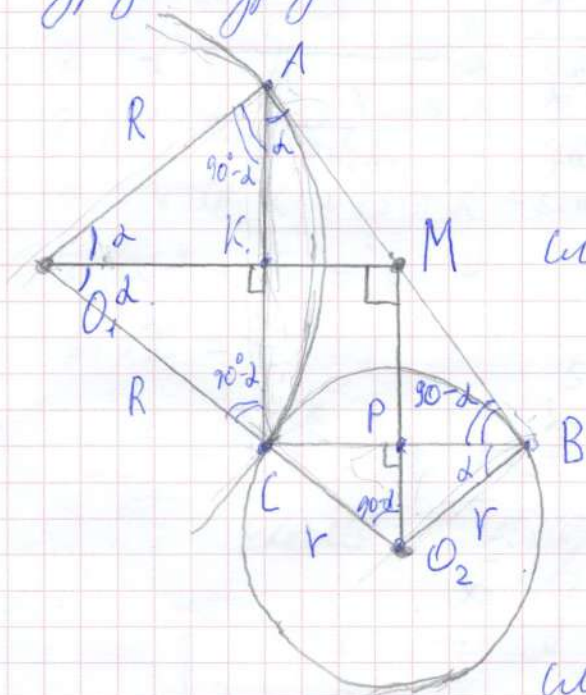


рис 1.1.

1.2) Внутреннее касание невозможно, т.к. по условию с прямой AB окружности имеют разные точки касания.

1.3) Следовательно окружности касаются друг друга внешним образом. (C - точка касания)



2) $O_2C = O_2B = r, \Rightarrow O_2M \perp CB$
 $O_1A = O_1C = R, \Rightarrow O_1M \perp AC$,
 следовательно, $\angle O_1MO_2 = 90^\circ$

3) $\angle O_1AM = 90^\circ, \angle O_1AC =$
 $= 90^\circ - \alpha, \Rightarrow \angle AO_1M =$
 $= \angle O_2O_1M = \alpha.$

4) $\angle O_2BA = 90^\circ, \angle O_2BC = \alpha$;
 следовательно, $\angle O_1O_2M = 90 - \alpha.$

5) $\triangle ABC \sim \triangle O_1O_2M$ по двум углам.
 ($\angle BAC = \angle O_2O_1M, \angle ABC = \angle O_1O_2M$).

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle O_1O_2M}} = \left(\frac{AB}{O_1O_2} \right)^2$$

$$6) AB = C.$$

$$AC = C \cdot \cos \alpha, AK = \frac{C \cdot \cos \alpha}{2}$$

$$BC = C \cdot \sin \alpha, BP = \frac{C \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$7) B \triangleq AD_1K.$$

$$AK = R \sin \alpha.$$

$$B \triangleq BPO_2 \quad BP = r \cos \alpha.$$

8) Из п 6, 7)

$$\begin{cases} \frac{C \cdot \cos \alpha}{2} = R \sin \alpha \\ \frac{C \cdot \sin \alpha}{2} = r \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \frac{C}{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha \\ r = \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

9) $AB = C, O_1 O_2 = R + r$

$$\frac{AB}{O_1 O_2} = \frac{C}{\frac{C}{2} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)}$$

$$= \frac{2}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)}$$

$$= \frac{2}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2}{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha}} = \frac{2}{\frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha}}$$

$$= 2 \cos \alpha \sin \alpha$$

10) $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle O_1 O_2}} = 4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$

Отвечая: $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle O_1 O_2}} = 4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$

Задача 3

1) Из условия $a > 0, b > 0, c > 0$

2) Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения.

Тогда по схеме Горнера

Предположить
(без док-ва)
что корни \exists !

$$x_1 \left| \begin{array}{cccc} a & 0 & 0 & b & -c \\ a & ax_1 & ax_1^2 & ax_1^3 + b & 0 \end{array} \right.$$

$\cdot x^3 \quad \cdot x^2 \quad \cdot x$

Верно

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Следовательно, $(ax_1^3 + b)x_1 - c = 0$

это уравнение
сначала
т.к. x_1 - корень
(если \neq)

$$x_2 \begin{cases} a & ax_1 & ax_1^2 & ax_1^3 + b \\ a & a(x_1 + x_2) & a(x_1 + x_2)x_2 + ax_1^2 & 0 \end{cases}$$

Следовательно $(a(x_1 + x_2)x_2 + ax_1^2)x_2 + ax_1^3 + b = 0$
Тогда получаем.

$$\begin{cases} ax^2 + a(x_1 + x_2)x + a(x_1 + x_2)x_2 + ax_1^2 = 0 & (1) \\ ax_1^4 + bx_1 - c = 0 & (2) \end{cases}$$

$$a(x_1 + x_2)x_2^2 + ax_1^2x_2 + ax_1^3 + b = 0 \quad (3)$$

$$(3) \quad ax_1x_2^2 + ax_2^3 + ax_1^2x_2 + ax_1^3 + b = 0$$

$$a(x_1^3 + x_2^3) + a(x_1x_2)(x_1 + x_2) + b = 0$$

$$a(x_1 + x_2)(x_2^2 + x_1^2 - x_1x_2) + a(x_1 + x_2)(x_1x_2) + b = 0$$

$$a(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_1x_2) + b = 0$$

$$a(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) + b = 0$$

Следовательно $a(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) < 0$ (т.к. $b > 0$)

$(x_1^2 + x_2^2) > 0$, $a > 0 \Rightarrow x_1 + x_2 < 0$, следовательно корни x_1 и x_2 имеют разные знаки, причем отрицательный больше по модулю, т.к. их сумма отрицательна.

Всего предполагается сумма ^{двух} корней
и тогда дальнейшее верно

$$(1) \quad aX^2 + a(x_1+x_2)X + (a(x_1+x_2)x_2 + ax_1^2) = 0$$

$$D = a^2(x_1+x_2)^2 - 4a(a(x_1+x_2)x_2 + ax_1^2) =$$

$$= a^2(x_1+x_2)^2 - 4a^2(x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2) =$$

$$= a^2(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2^2 - 4x_1^2) =$$

$$= a^2(-3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2) =$$

$$= -a^2(3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2).$$

По неравенству Коши.

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \cdot \frac{|x_1| + |x_2|}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}.$$

$$x_1^2 + 2|x_1x_2| + x_2^2 \geq 4|x_1x_2|$$

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2|x_1x_2|.$$

Следовательно, $3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 > 0$
(т.к. $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$).

Следовательно $-a^2(3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2) < 0$,

$D < 0 \Rightarrow x_1$ и x_2 единственные действительные корни исходного уравнения, причем имеют разные знаки. и образуют корень бивале комплексного и модулю по доказанному выше.

ч. и т. д.

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

вопр. 4

1) $9 \cdot x^{6x} = 1$

$$x^{6x} = \frac{1}{9}$$

2) Будем $f(x) = x^{6x}$.

при $x > 0$ $f(x)$ ^{не возрастает} монотонно
возрастает

при $x < 0$ ~~функция~~ $f(x)$ ^{функция не определена}
монотонно убывает

3) Следовательно,

если при $x > 0$ есть корни, то
он ~~только~~ ^{только} единственный.

т.к. ~~то~~ $f(x)$ ~~мон-~~ ^{не} возрастает
при $x > 0$, $\frac{1}{9} = \text{const}$.

Подберем $x = \frac{1}{3}$

Следовательно у уравнения
только один ~~то~~ положительный
корень $x = \frac{1}{3}$.

4) При $x < 0$ $f(x)$ принимает
только отрицательные значения, т.к. $\frac{1}{9} > 0$, то отрицательных корней нет.

Ответ: а) 1 положительный корень $x = \frac{1}{3}$ —
б) отрицательных корней нет.

